



TITLE:

フラストレートスピン系における リエントラント転移の動的特性(修 士論文(2004年度))

AUTHOR(S):

田中, 宗

CITATION:

田中, 宗. フラストレートスピン系におけるリエントラント転移の動的
特性(修士論文(2004年度)). 物性研究 2006, 85(4): 523-551

ISSUE DATE:

2006-01-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/110390>

RIGHT:

修士論文 (2004年度)**フラストレートスピンの系におけるリエントラント転移の動的特性¹**

- Dynamical Properties of the Reentrant Phase Transition in Frustrated Spin Systems -

東京大学 理学系研究科 物理学専攻 宮下研究室 田中 宗²

スピングラスのような複雑な系においては、短い時間で平衡状態に達しないことから、特に動的特性に興味を持たれている。我々は、相互作用のフラストレーションや不均一性がスピングラスのダイナミクスに大きな寄与を与えていると考えた。フラストレート系においては多くの縮退した準安定状態を作り出し、また、スピン間の相関関数が温度の関数として非単調に振る舞う。また、相互作用の不均一性は緩和時間のスケールに幅を持たせる。そこで我々は、一様なフラストレート系の一部に、強い相互作用を挿入した有効的なモデルを提案した。そのモデルにおいて、温度を変化させたときに生じる動的な振舞や、記憶効果の微視的機構の解明に取り組んだ。更に、この系において、局所的なスピンの緩和時間、準安定状態のドメインの緩和時間、系全体の緩和時間といった、3つのスケールの緩和時間が存在することを見出した。このモデルはスピングラスの動的特性の微視的機構を示す一つのシナリオとなっている。

1 導入

我々の研究の目的は、スピングラスのエージング現象の微視的機構の解明である。この章では、我々の研究の背景および本論文の構成を述べる。まずはじめに、我々の研究が物理学という学問の中でどの部分に位置づけられるかを説明する。次に、強磁性体やスピングラスといった磁性体を扱う統計物理学の歴史について述べる。最後に本論文の各章ごとのトピックを述べる。

物理学の発展により、非常に多くの、そして興味深い現象を説明することが可能となった。物性物理学においては、平衡状態から次第に非平衡状態へと興味対象は広がっていつ

¹本稿は、東京大学理学系研究科物理学専攻に提出した修士論文「Dynamical Properties of the Reentrant Phase Transition in Frustrated Spin Systems」を、本誌掲載のために和訳した。オリジナル版の一部に関しては、現在投稿準備中であるため、その関連部分については必要に応じて修正を加えた原稿である(そのため、オリジナル論文で触れられている幾つかのトピックに関しては削除している)。

オリジナル版(英語カラー版)は、http://spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~shu-t/study/master_thesis.pdfに掲載してある。

²E-mail: shu-t@spin.phys.s.u-tokyo.ac.jp

た。多くの興味深い非平衡状態は実験的に観測されてはいたが、平衡状態から遠く離れた非平衡状態を完全に記述することが困難なため、現在でも解決されていない問題は少なくない。また一方で、扱う系としては、一様な系から不純物を含むランダムな系へと興味は広がっていった。一様な系はそこに潜む対称性をうまく利用することで、一般的に取り扱うことが(ランダムな系に比べて)容易である。しかしながら、スピングラスのようにランダムネスの影響が局所的ではなく系全体に広がっている場合は、取り扱いが非常に困難になる。そのような背景の中、我々はスピングラスのエイジング現象に取り組もうと考えた。この問題はランダム系の非平衡現象であり、解析が困難なので、エイジング現象を引き起こす本質的に重要な要素を抽出することが必要である。

単純化されたモデルは普遍的に内在する性質を引き出すのに極めて有用である。磁性体の性質は個別には非常に難しいものであるが、単純化された様々なモデルは相転移のユニバーサルな特性を見出した。強磁性体のイジングモデルはその典型例であり、磁性体のみならず、2成分合金や格子気体モデルの相転移までも説明することが可能である。このことは、単純化されたモデルがユニバーサルな現象を説明し得ることの好例である。

このようにして、相転移に関してある程度の理解を得ることはできたが、かつてはランダム系に見られる新しいタイプの「相転移」を説明することは不可能だった。例えば、AuFeやCuMnに代表されるような希薄磁性合金の帯磁率測定で特異性が見られた[1],[2]が、それに対する明確な説明をすることはできなかった。そこで、EdwardsとAndersonは「Edwards-Andersonモデル」[3]という、相互作用が各サイトごとにランダムに別々の値を取るモデルを考案した。単一の結晶格子を組む系においてはスピン間に働く相互作用はどの部分も周期的だと考えても差し支えないが、CuMnやAuFeなど希薄磁性合金ではRKKY相互作用が働く。この相互作用はスピン間の距離の関数であり、強磁性的相互作用にも反強磁性的相互作用にもなり得る。EdwardsとAndersonは、相互作用の値を確率分布に従うものとしてモデルを作り、解析した。Edwards-Andersonの理論は「複雑な系」を研究する第一歩となった。

その後、スピングラスに関して数多くの研究がなされた。また現在は、スピングラスを扱う統計物理学の手法が、物質としての性質のみならず、広く情報工学の研究にまでも応用されている[4]。西森線上で内部エネルギーを厳密に計算することを可能にした西森ゲージの方法[5]はその典型例であり、誤り訂正符号などの問題に応用されている[6]。また、スピングラスのモデルはガラスや高分子、蛋白質などといったガラス系の興味深い現象を説明するプロトタイプであると期待される。それ故、スピングラスを扱う統計物理学の発展は非常に重要な課題である。

本論文は6つの章と1つの付録から成る。2章では、スピングラスの性質やスピングラスで観測されるエイジング現象と呼ばれる動的特性について述べる。3章では、一様な系

に局所的に強い相互作用を導入したモデルに [7] について説明し、そのモデルにおける記憶効果について述べる。4 章では、フラストレート飾りボンド系におけるリエントラント転移や有効的な緩和時間について述べる。5 章では、飾りボンドで構築した関連するモデルを説明し、そのモデルに現れる記憶効果や動的特性について報告する。6 章では、本論文のまとめと今後の課題を述べる。今回取り扱ったモデルは記憶を保持する新たなシステムの提案になり得るものである。付録では、学習理論で最も標準的な「Hopfield モデル」について簡単に紹介する。

2 スピングラスとエイジング現象

スピングラスの研究は、1970 年代に希薄磁性合金である AuFe や CuMn の帯磁率測定 of 異常を発見したことから始まる [8]-[10]。ゼロ磁場中で、帯磁率曲線に見られるカスプは、磁場をかけると次第に丸まっていく。この振舞は当時の理論では説明することができないものであった。そうした背景から、Edwards と Anderson はこの現象を説明する理論を構築した [3]。希薄磁性合金ではスピン間に RKKY 相互作用が働く。RKKY 相互作用はスピン間の距離 r の関数であり、 r^{-3} で減衰振動し、距離 r に応じて、強磁性的相互作用と反強磁性的相互作用をとる。この章では、スピングラスの特徴やエイジング現象について簡単にまとめる。

2.1 スピングラスの重要な性質

スピングラスには 4 つの重要な性質がある。まず第一に、スピングラスはランダム系である。希薄磁性合金の場合、スピン間には RKKY 相互作用が働き、これがランダムネスの 1 つの起源となる。金属中の不純物原子がスピンを持っていると、不純物の局在スピンの伝導電子のスピンの間に相互作用が働く。この相互作用を RKKY 相互作用と呼ぶ。簡単に言うと、伝導電子は不純物原子 (ここでは Fe や Mn) のスピン \mathbf{S}_i に散乱され、別のスピン \mathbf{S}_j と相互作用する。この相互作用を厳密に書き下すと、

$$\mathcal{H}^{\text{RKKY}} = J_{ij}^{\text{RKKY}} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -9\pi \frac{J^2}{\epsilon_F} \left(\frac{N_e}{N} \right)^2 F(2k_F |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|) \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (1)$$

ただし、 J は伝導電子と不純物電子の間の交換積分、 k_F, ϵ_F はそれぞれ伝導電子のフェルミ波数、フェルミエネルギー、 N は原子の個数、 N_e は電子の個数、 \mathbf{R}_i はスピン \mathbf{S}_i のある位置であり、 $F(x)$ は、

$$F(x) = \frac{-x \cos x + \sin x}{x^4} \quad (2)$$

である。不純物濃度が非常に低いと、不純物の効果は近藤効果 [11] の問題のように独立に扱うことが可能である。しかしながら、スピングラスにおいては、不純物同士が互いに影響しあう程度の濃度の不純物を含む。そのため、ランダムネスの効果が秩序化の特性の理解を困難にしている。

第二に、スピングラスはクエンチ系である。通常の一様な系であれば、ある物理量を求める際にスピン配位に関してのみ状態和を実行すれば良いが、上に述べたように、スピングラスは相互作用の値がランダムに分布しているため、相互作用のランダムネスの確率分布に関しても平均操作を取らなければならない。しかし、実際の系では相互作用の値は固定されている。このことが、相互作用のランダムネスに関する平均を取ることを困難にしている。

第三に、スピングラスはフラストレート系である。フラストレート系においては多数の縮退した準安定状態が存在する。それ故、自由エネルギーの多谷構造が現れる。

第四に、スピングラスはスピンが凍結した状態であり、遅い緩和現象が見られる。つまり、短い時間では平衡状態まで緩和しない。これは、系をスピングラス転移温度 T_g 以下にすると、スピンが状態を長い時間保持するということである。この振舞を定量的に考えるためには、次に挙げる物理量 q を計算すれば良い。

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lim_{t \rightarrow \infty} \langle S_i(0) S_i(t) \rangle_T \quad (3)$$

これは十分長い時間経ったスピンと現在のスピンの自己相関関数を取ることに対応している。ここで、 $S_i(t)$ とは、時刻 t における S_i の値、また、 $\langle \cdot \rangle_T$ は温度 T において、物理量 (\cdot) の熱平均値を表す。スピングラス相においては次の2つの状態方程式を満たす。

$$\begin{cases} m = 0, \\ q \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

ただし、 m は磁化である。スピングラス状態においては、スピンはランダムな方向を向いていて、全体としての磁化は $m = 0$ であるが、それぞれのスピンは凍結している ($q \neq 0$) ことを表している。

以上述べてきたように、スピングラスは多くの特徴を持っている。本研究では、スピングラスのエイジング現象の微視的機構を解明するにあたり、本研究では、フラストレーションと相互作用のランダムネス (不均一性) に着目してモデルを構築した。

2.2 スピングラスにおけるエイジング現象

スピングラスの遅い緩和現象に関連して、エイジング現象と呼ばれる興味深い振舞が観測される。

平衡状態においては，外部環境の変化が無ければそのままの状態を保っている．また，エイジング現象は系の履歴に依存する振る舞いの総称である．ここで，エイジングとは，系が非平衡状態から平衡状態へと緩和していく度合いを表す．

エイジング現象は，高分子 [12] やガラス [13]，過冷却液体 [14] やスピングラス [15]-[21] と言った温度 T_g でガラス転移が起こる物質群に現れる．また，温度を T_g 以下にすると，平衡状態への緩和が非常に遅くなる．こうした物質群では，熱過程や力学的過程に強く依存する振舞が実験的に数多く確認されている．一つの例として，スピングラスの動的帯磁率測定に見られるエイジング現象 [22] を紹介する．

ここで行う「温度サイクリング」と呼ばれる実験方法には大きく 3 つの段階がある (図 1)．

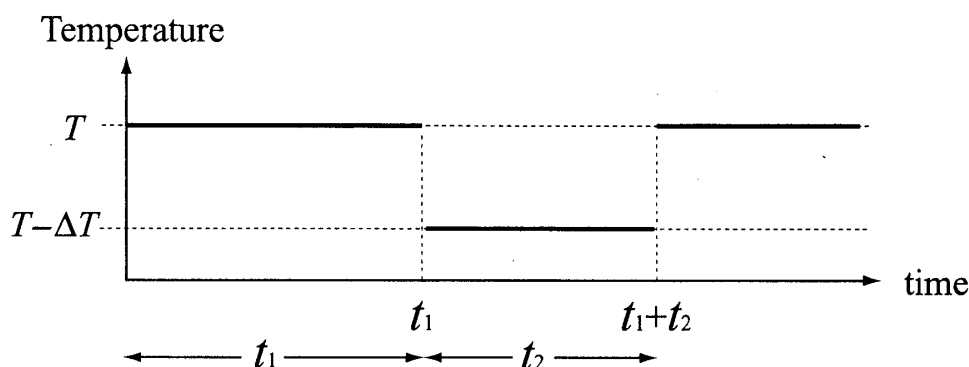


図 1: このような温度変化をさせる操作を「温度サイクリング (temperature cycling)」と呼ぶ．時刻 0 から t_1 においては温度 T に，時刻 t_1 で温度 $T - \Delta T$ にし，時刻 $t_1 + t_2$ で再び温度 T に戻す．温度 T も $T - \Delta T$ もスピングラス転移温度 T_g よりも低い温度である．

まずはじめに，スピングラスの物質をスピングラス転移温度 T_g より高い温度から転移温度より低い温度 $T (< T_g)$ に冷却し，時間 t_1 だけその温度で保持する．次に， $T - \Delta T$ の温度に冷却し，時間 t_2 だけ保持する．最後に，温度を T に戻す．その間，交流磁場 $H(t) = H_0 \sin \omega t$ をかけ続けておく．動的帯磁率の虚部は次の式で与えられる．

$$\chi''(\omega, t) = \left| \frac{\omega}{2\pi H_0} \int_{t-\frac{\pi}{\omega}}^{t+\frac{\pi}{\omega}} M(t') \cos(\omega t') dt' \right| \quad (5)$$

ただし， $M(t)$ は時刻 t における磁化である．

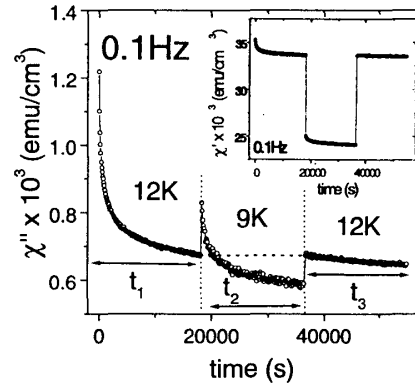


図 2: 温度サイクリングの実験による, 絶縁体スピングラス $\text{CdCr}_{1.7}\text{In}_{0.3}\text{S}_4$ の動的帯磁率の虚部 χ'' を時間に対してプロットしたものである. スピングラス転移温度は $T_g = 16.7\text{K}$ である. 印加磁場の周波数は 0.1Hz である. 内部にある小さい図は同じ実験における動的帯磁率の実部 χ' である. [22] より引用.

図 2 は絶縁体スピングラス $\text{CdCr}_{1.7}\text{In}_{0.3}\text{S}_4$ の動的帯磁率を測定したものである [22]. 実験条件は 0.1Hz の交流磁場, $12\text{K} \rightarrow 9\text{K} \rightarrow 12\text{K}$ の温度サイクリングである. 平衡状態において帯磁率の虚部 χ'' は

$$\chi'' = \frac{1}{k_B T} \int_{-\infty}^{\infty} \langle M(0) M(t) \rangle e^{i\omega t} dt \quad (6)$$

となる. 図 2 で考えている状態は非平衡状態であるから, χ'' は局所的な時間スケールで考える必要があり, 式 (6) で $\langle \cdot \rangle$ は非平衡状態における (\cdot) の平均値と考えなければならない. χ'' の値は徐々に小さい値を取るようになり, 平衡状態に近付くようになる. この変化はエイジングを表している.

はじめの段階 (温度 T) で χ'' は小さくなる. 時刻 t_1 で, 温度を $T - \Delta T$ にした途端, χ'' は急激に増大する. これを「若返り現象」と呼ぶ. そして, $T - \Delta T$ における系の平衡化が始まる. 時刻 $t_1 + t_2$ において, 温度を T に戻すと, χ'' はまた時刻 t_1 の値に戻る. これを「記憶効果」と呼ぶ. これらの 2 つの振舞は温度サイクリングの実験におけるエイジング現象に特徴的なものである. また, この実験事実は温度 T における平衡化と $T - \Delta T$ における平衡化が独立であることを表している. 若返り現象や記憶効果は温度摂動 ΔT の大きさに依存するものであり, これと同様の現象は摂動として磁場やスピン間に働く相互作用の値を変化させても観測できるものである [23]-[27]. これらの現象は「カオス効果」と呼ばれ, それぞれ「温度カオス」, 「磁場カオス」, 「相互作用カオス」と呼ばれることもある.

2.3 記憶効果の定性的理解

いま述べた記憶効果の定性的な理解は自由エネルギーの構造から説明できる。フラストレーションとランダムネスの影響から、スピングラスの自由エネルギーは多谷構造である。高温では、系は位相空間のどの位置にも遷移することが可能であり、その状態をエルゴード的であると言う。しかしながら、スピングラス転移温度より低い温度においては、準安定状態間のエネルギー障壁が大きいから、系は全ての状態間を行き来することが困難になる。これを非エルゴード的であると言う。温度を下げれば下げるほど、元々あった谷が幾つかの谷に分離し、より複雑かつ階層的な自由エネルギー構造が作り出される。そのため、ガラス状態では遅い緩和現象が現れるのである。先に挙げた実験において、温度 T から $T - \Delta T$ まで下げたときに、それぞれの谷がいくつかの谷に分離されるのである。温度摂動 ΔT が大きいとき、温度 T でのエネルギー障壁に比べて温度 $T - \Delta T$ でのエネルギー障壁は大きくなる。それゆえ、温度 $T - \Delta T$ では、温度 T でもともと居た状態から遷移することは容易にはできず、温度 $T - \Delta T$ で形成された小さな谷の間を遷移することになる。そこで温度を元に戻すと、自由エネルギーは元の形に戻るから、位相空間上の同じ位置に系が存在することになる。このようにして温度を下げる方向での温度サイクリングの実験は定性的にはあるが、説明することが可能である。

2.4 我々の研究の目的

先に述べたような、自由エネルギーの構造の変化による記憶効果の説明は、定性的な理解を与えるが、微視的な機構は明らかにはならない。我々は記憶効果や若返り効果にフラストレーションとランダムネス (相互作用の不均一性) の効果が重要な役割を担うと考えた。そこで我々は、一様なフラストレート飾りボンド系の一部に相互作用の不均一性を取り入れた有効的なモデルを構築し、スピングラスのこれらの緩和現象の解明をすることが目的である。また、最近になり、エイジング現象はランダムネスの無い一様な系でも観測された [28],[29]。その現象の解明についても視野に入れている。

3 有効相互作用系における記憶効果

先に述べたように、スピングラスにおけるエイジング現象は多くの実験で観測されて来た。スピン間に働く相互作用レベルの微視的なスケールの機構の解明に取り組んだものとして、例えば、吉野ら [26] や宮下ら [7] の研究が挙げられる。前者は温度カオスや相互作用カオスの効果を示したものであり、実験的にも矛盾しない結果が現れることが確かめられている。また、光照射によりスピングラス状態が誘起される半導体スピングラスにおい

ても、彼らのモデルとの関連性を調べられている [23],[24],[30]。後者は温度が変化すると同時に相互作用の値が変わるモデルを導入し、また、メモリースポットと呼ばれる概念を導入して、記憶効果を説明した。本章では、このモデルについて紹介する。

3.1 相互作用の不均一性 — メモリースポットの導入

相互作用の不均一性は系の緩和にどのような影響を与えるかを考えるため、宮下ら [7] はメモリースポットという概念を導入した。例えば、図3のような 3×4 のイジングスピンからなる系を考える。

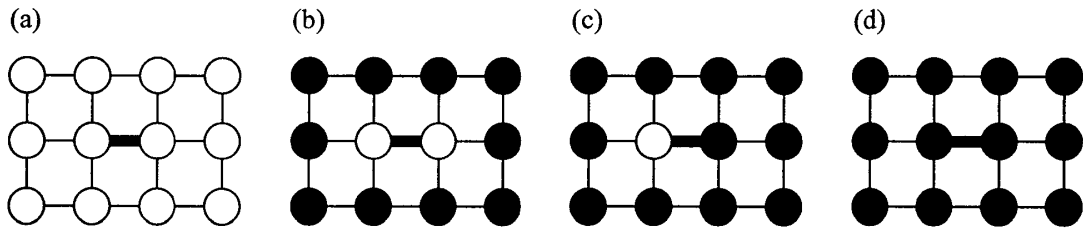


図 3: 丸はイジングスピンを表し、白丸と黒丸はそれぞれスピンのアップ状態とダウン状態に対応する。線は相互作用を表す。今の場合、相互作用は細い線も太い線も強磁性的相互作用である。ただし、太い線が表す相互作用 J_1 は細い線が表す J_0 に比べて強く、今の場合 $J_1 > 3J_0$ とする。 J_1 を「メモリースポット」と呼ぶ。メモリースポットがあるために、系は「記憶」を保持することが可能である。

太い線は細い線で描かれた J_0 に比べて強い相互作用 ($J_1 > 3J_0$) である。 J_0 と J_1 はともに強磁性的相互作用である。図3(a)では、全てのスピンが同じ向きを向いていて、基底状態であり、エネルギーは $E_0 = -16J_0 - J_1$ である。(a)の状態から(d)の状態に移るのに、どれだけのエネルギー障壁を越えなければいけないかを考える。図3(b)では、細い線のみで繋がっているスピンは全て同じ向きを向いているが、太い線の所では(a)の状態を保持している。この状態は準安定状態であり、エネルギーは $E_1 = E_0 + 12J_0 = -4J_0 - J_1$ である。図3(c)では、細い線の1つのスピンの反転している。エネルギーは $E_2 = E_0 + 6J_0 + 2J_1 = -10J_0 + J_1$ である。いま $J_1 > 3J_0$ であるから、この状態は不安定状態である。つまり、(b)と(d)の間には $\Delta E = E_2 - E_1 = 2J_1 - 6J_0$ だけのエネルギー障壁がある。そのため、いったん(a)の状態に落ち着くと、(d)の状態への遷移確率が低くなる。つまり、相互作用の不均一性を導入することによって、系に記憶を保持させることが可能であることが分かった。このようにスピンの配位を記憶させるような局所的に強い相互作用のことを「メモリースポット」と呼ぶ。メモリースポットでの緩和時間はおよそ

$$\tau_{\text{memory}} = \tau_0 \exp \left(\frac{\Delta E}{k_B T} \right) \quad (7)$$

と書ける。ただし、 τ_0 はミクロな緩和時間であり、実際の系ではおおよそ 10^{-12} 秒程度であると考えてよい。 τ_{memory} はある温度で急激に大きくなる。この効果については後の章で述べることにする。

3.2 記憶効果の実現

本研究では、記憶効果をスピン配位のパターンを記憶するという意味で考える。これから考える系は図4である。細い線は温度に依存する相互作用を表し、太い線はメモリースポットを表す。温度依存する相互作用は、 $T_1 = 3$ で $K_1 = 0.48$ 、 $T_2 = 1$ で $K_2 = -0.57$ とする³。2次元正方格子イジングスピンの臨界値は $K_C = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \simeq 0.44$ であるから、このような値を取れば、 $T_1 = 3$ で強磁性秩序、 $T_2 = 1$ で反強磁性的秩序が形成される。この 10×10 個のイジングスピンでモンテカルロシミュレーションを行った(確率過程の規則は熱浴法に従った)。

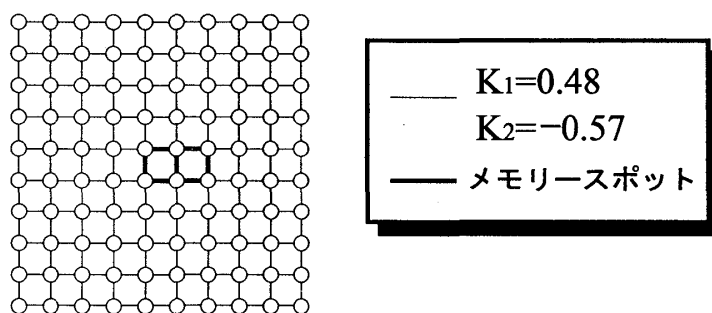


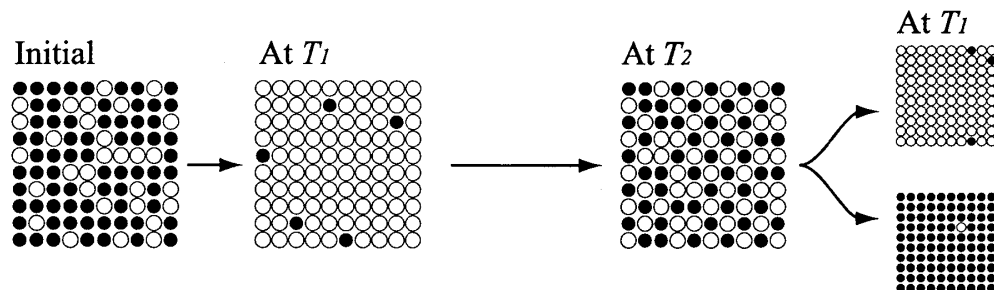
図 4: 2次元正方格子系 (10×10 個のイジングスピン)。太い線はメモリースポットを表し、細い線は温度依存する相互作用を表す。

数値計算の手順は以下の通りである。まずはじめに、初期状態をランダムに取る。次に、温度を T_1 とすると、系は T_1 での平衡状態である強磁性状態に落ち着く。その後、温度を T_2 にすると、このとき系の平衡状態である反強磁性状態に落ち着く。最後に、温度を T_1 に戻す。メモリースポットがなければ、温度を T_1 に戻したときに向きも含めて元の状態に戻るか、反対の向きで強磁性秩序が成長するかは確率 $1/2$ ずつである(図5(a))。つまり、いったん秩序状態を破壊してからもう一度秩序状態に戻すとき、完全に元の状態に戻るか反対になるかが等確率である。しかしながら、メモリースポットがあると、元の状態に戻る確率が高くなり、記憶が保持されることが確認できる(図5(b))。温度 T_2 では反強磁性的な秩序が成長しているにもかかわらず、温度 T_1 におけるメモリースポットでの情報は保持されているから、温度 T_1 に戻したときに、ドメインがメモリースポットを核

³以降、断り無く $K = \beta J$ とする。

として成長することが分かる．このように相互作用の値を調節し，ドメインのスピンの配位の情報で状態を記憶するということは，Hopfield モデルと等価である．

(a)



(b)

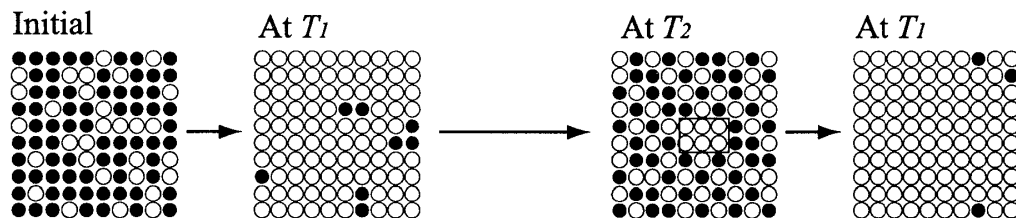


図 5: (a)：メモリースポットが無い場合， $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1$ の操作を行うと， T_1 での強磁性秩序の形成が2つの状態のどちらを取るかは1/2ずつの確率で決定される．(b)：メモリースポットがある場合，強磁性秩序は片一方の状態が確率的に優位になり，短い時間ではドメインとしての磁化の向きは変化しない．

次の節では，今述べた 10×10 個のイジングスピン系を1ユニットとして，それを縦横に 5×5 のユニットを並べて 50×50 個のイジングスピンの系 (図6) をモンテカルロシミュレーションする．それぞれのユニット間は弱い相互作用で繋げる．

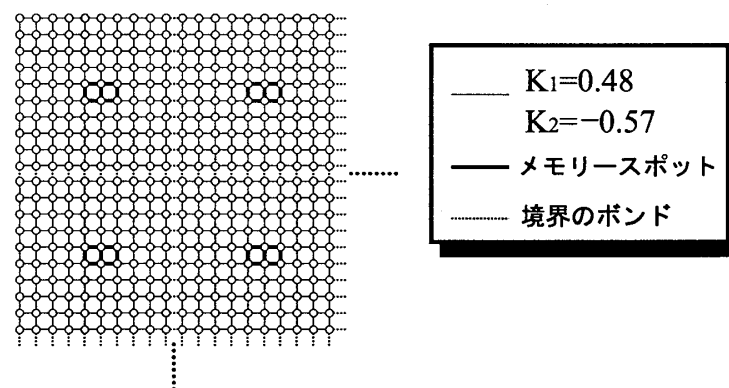


図 6: 図4の 10×10 のクラスターを 5×5 並べる．ドメイン間を繋ぐ相互作用は周囲の相互作用に比べて小さい強磁性的相互作用である．

3.3 このモデルの結果

我々は図にあるような 50×50 個のイジングスピンについてシミュレーションした。温度サイクリングは図7のように $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2$ と変化させた。また、確率過程は熱浴法に従った。

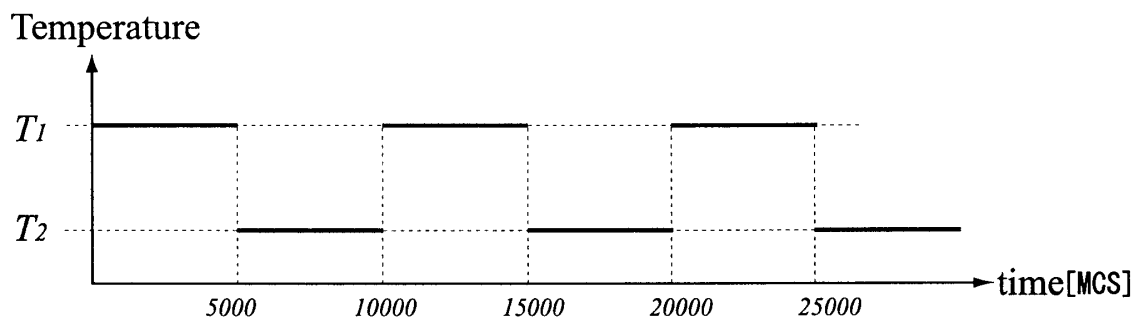


図 7: 数値計算の操作。時間と温度の関係。

図8にスナップショットを掲載した。5000MCS のスピン配位と 10100MCS の配位を見比べたときに、各ドメインが平均的に同じ向きを向いていることが確認できる。これは先ほど述べたように、メモリースポットの部分が核となって記憶しているからである。また、温度 T_2 におけるスナップショットの下の図は正方格子を2つの副格子に分解した際に、片方の副格子に属するスピンに $\sigma \rightarrow -\sigma$ のゲージ変換を施したものである(反強磁性ゲージ)。反強磁性秩序が形成されていると、反強磁性ゲージを施した後は、同じ向きのスピンがドメイン内に一面に広がることになる。

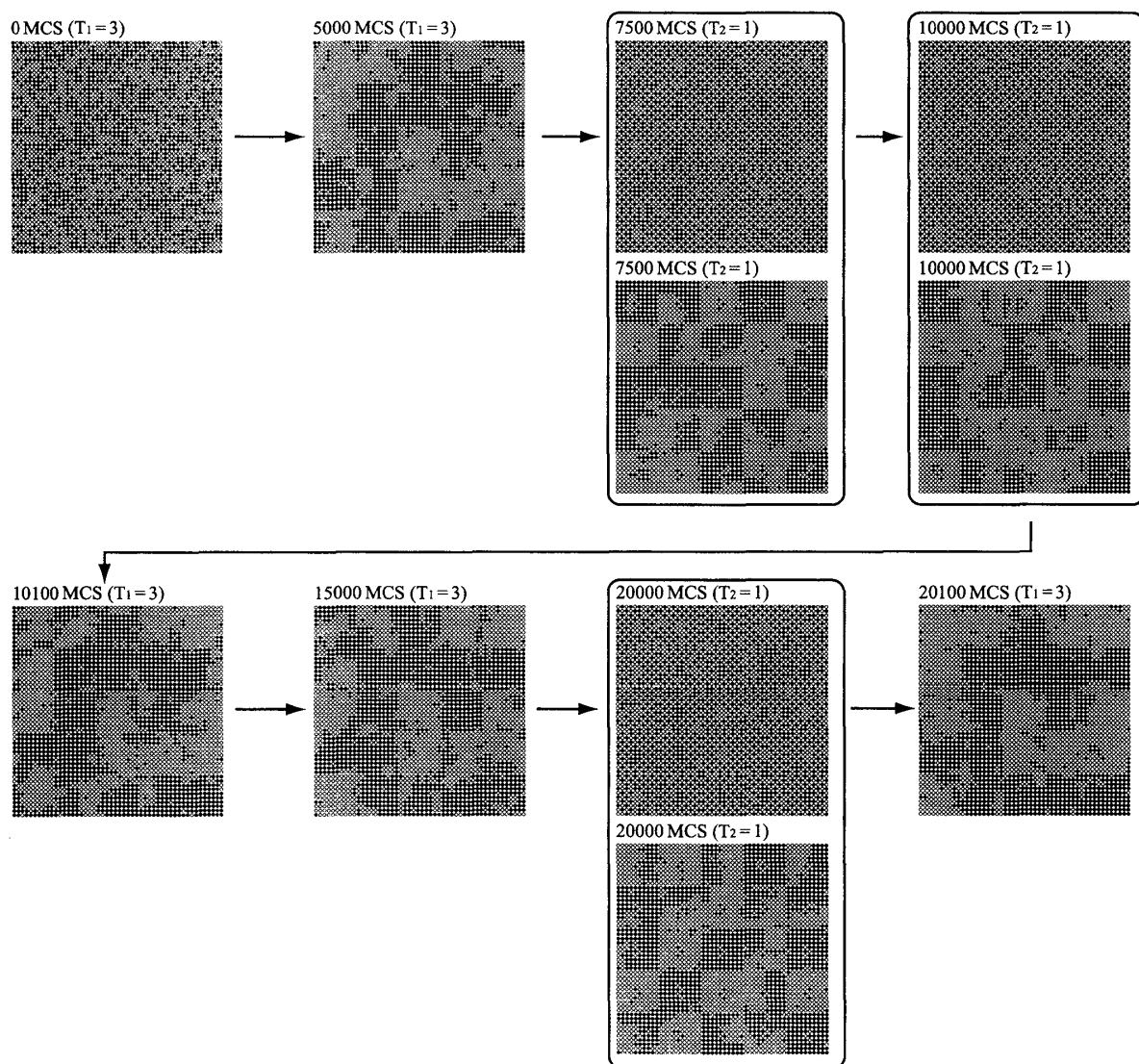


図 8: $T_1 = 3$ では、相互作用の値が $K_1 = 0.48 (> K_C)$ だから、各々のドメインで強磁性秩序が現れる。一方 $T_2 = 1$ では、相互作用の値が $K_2 = -0.57 (< -K_C)$ だから、反強磁性秩序が各々のドメインで現れる。また、メモリースポットが各ドメインに入っているので、スピン配位は 10100MCS と 20100MCS の時点で、それぞれ 5000MCS, 15000MCS の情報が記憶されていることが分かる。 $T_2 = 1$ で、下に描かれた図は反強磁性ゲージ $\sigma \rightarrow -\sigma$ を施したものである。

各ユニットがどのような振舞をしているかを見るために、「磁化」と「自己相関関数」の値を測定した。メモリースポットがあるために、各ドメインのスピンの向きは高い確率で同じ向きに「ピン止め」されている。そのため、ここで言う「磁化」を計算するときには単純に全てのスピンの和を取らず、各ドメインで符号を定義し直す必要がある。そのため、メモリースポットが向いている向きと同じ向きを向いたときに +1、逆向きのときに -1 として合計し、スピン数で割った値を「磁化」とする。

次に「自己相関関数」を考える．温度を T_1 から T_2 に変えた瞬間 ($t_0 = 5000[\text{MCS}]$) でのスピン状態を $\{s_i^{(0)}\}$ とし，時刻 t におけるスピン状態を $\{s_i(t)\}$ とする．自己相関関数 $q(t)$ は

$$q(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_i s_i^{(0)} s_i(t) \quad (8)$$

で定義される．メモリースポットがあるため， T_1 では自己相関関数が 1 に近づく．両方の物理量は，500 サンプルの平均値で取ったものである．

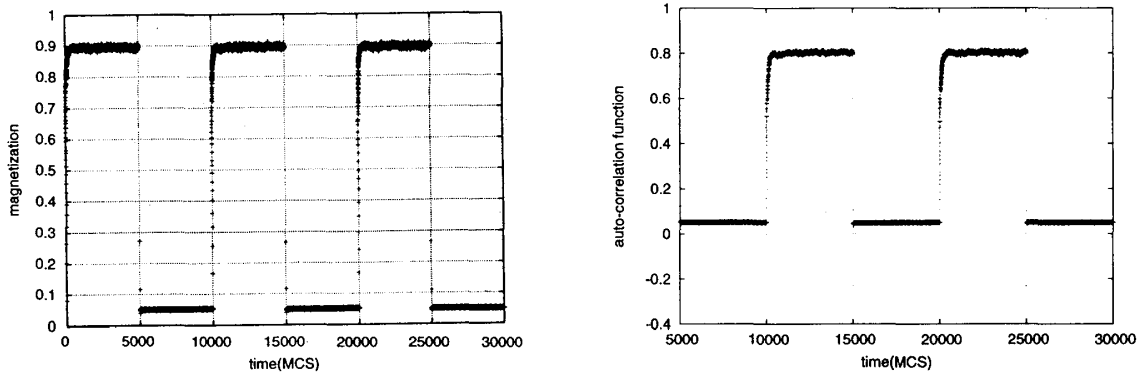


図 9: (左) : 温度 T_1 において強磁性秩序が成長する．温度 T_2 における値は反強磁性秩序が形成し，強磁性秩序が破壊されているが，メモリースポットの部分の秩序は破壊されていないことを表す．(右) : T_1 における強磁性秩序は T_2 で反強磁性秩序が形成し破壊されるにもかかわらず，メモリースポットがあるため元に戻る．

4 フラストレーションのある飾りボンド系とリエントラント転移

4.1 有効相互作用の温度依存性

スピングラスにおけるスピン間の相互作用は，強磁性的な相互作用と反強磁性的な相互作用がランダムに分布している．そのため，系全体にフラストレートしたプラケットが分布している．後で述べるが，フラストレートしたスピン系はリエントラント (非単調) な振舞を示す [31]．

フラストレートした系を考える前に，図 10 にあるような一様なイジングスピン鎖を考える．全てのスピン間の相互作用は J であり，三角で描かれている中間にある「飾りスピン」の数は $n - 1$ 個ある．

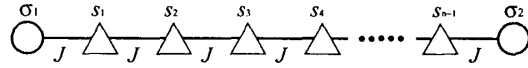


図 10: スピン σ_1 と σ_2 は $n-1$ 個の間にあるスピン (Δ) を介して繋がっている. σ_1 と σ_2 の間に働く有効相互作用を考える. \bigcirc は「システムスピン」を表し, Δ は「飾りスピン」を表す.

ここで「システムスピン」 σ_1, σ_2 の相関関数から有効相互作用 $K_{\text{eff}} = \beta J_{\text{eff}}$ を次の式で定義する. ただし, $\beta = 1/k_B T$ である.

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle = \tanh K_{\text{eff}} \quad (9)$$

有効相互作用 K_{eff} を計算するには, 中間の「飾りスピン」 $\{s_i\}_{i=1}^{n-1}$ について部分和を実行すればよく,

$$e^{K_{\text{eff}} \sigma_1 \sigma_2} \propto \sum_{s_{n-1}=\pm 1} \cdots \sum_{s_1=\pm 1} e^{-\beta \mathcal{H}} \quad (10)$$

とすればよい. ただしここでハミルトニアン \mathcal{H} は,

$$\mathcal{H} = -J \sigma_1 s_1 - J \sum_{i=1}^{n-2} s_i s_{i+1} - J s_{n-1} \sigma_2 \quad (11)$$

である. これを計算すると, 有効相互作用の温度依存性は,

$$K_{\text{eff}}(T) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \tanh^n \beta J}{1 - \tanh^n \beta J} \right) \quad (12)$$

となる. フラストレート系に関しても, 同様に飾りスピンに関して状態和を実行することで, 有効相互作用が定義できる. 次に, 図 11 のような単純な三角形のクラスタを考える. J_1 は反強磁性的相互作用であり, J_2 は強磁性的相互作用である.

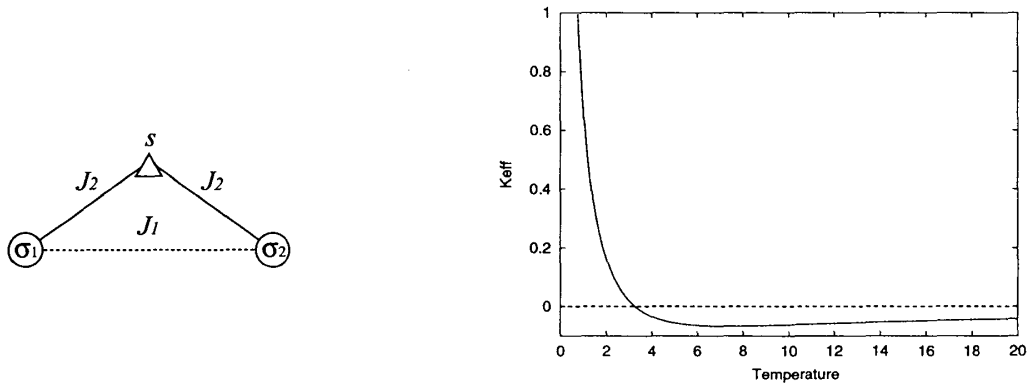


図 11: (左): 実線は強磁性的相互作用, 破線は反強磁性的相互作用を表す. この系はフラストレート系である. (右): $J_1 = -1.0, J_2 = 2.0$ とする. このとき有効相互作用 K_{eff} は温

度に対して非単調な振舞を示す．また温度を变化させると K_{eff} の符号も变化する．この振舞を「リエソラソト現象」と呼ぶ．

有効相互作用は次式で定義される．

$$e^{K_{\text{eff}}\sigma_1\sigma_2} \propto \sum_{s=\pm 1} e^{\beta J_1\sigma_1\sigma_2 + \beta J_2(\sigma_1+\sigma_2)s} \quad (13)$$

これを計算すると、

$$K_{\text{eff}}(T) = \beta J_1 + \frac{1}{2} \log \left[\cosh \left(\frac{2J_2}{k_B T} \right) \right] \quad (14)$$

図は $J_1 = -1, J_2 = 2$ のときの有効相互作用 (式 (14)) の温度依存性を表している．温度変化に対して単調ではなく、かつある温度で有効相互作用の符号が変わっている．このような非単調な振舞をリエソラソト現象と呼び、この現象はフラストレート系に典型的なものである．

次に2つの鎖を繋げた場合を考えよう (図 12)．

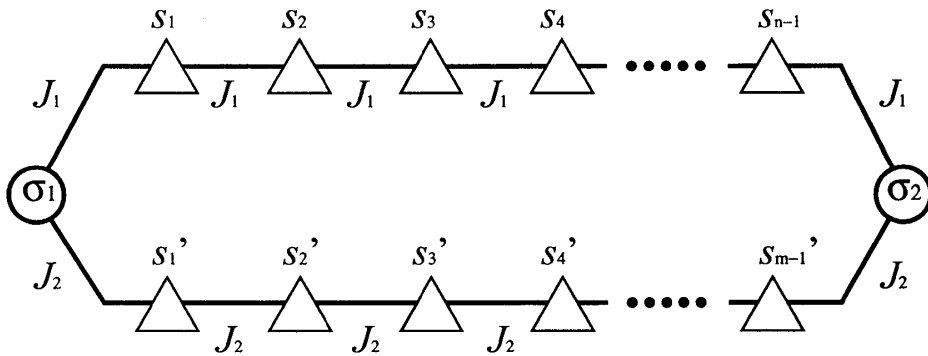


図 12: システムスピソ σ_1 と σ_2 は2つの鎖 (長さ n と m の鎖) で繋がっている．有効相互作用の値は各々の鎖から求められる有効相互作用の値を足せばよい．

鎖 1 (相互作用の本数 n 、強さ J_1) の有効相互作用の温度依存性を $K_1(T, n, J_1)$ とし、鎖 2 (相互作用の本数 m 、強さ J_2) の有効相互作用の温度依存性を $K_2(T, m, J_2)$ とする．このとき、全体としての有効相互作用は

$$K_{\text{eff}}(T) = K_1(T, n, J_1) + K_2(T, m, J_2) \quad (15)$$

となる．

次に、全ての相互作用の値が異なる三角クラスタ (図 11) の有効相互作用の温度依存性を計算しよう．

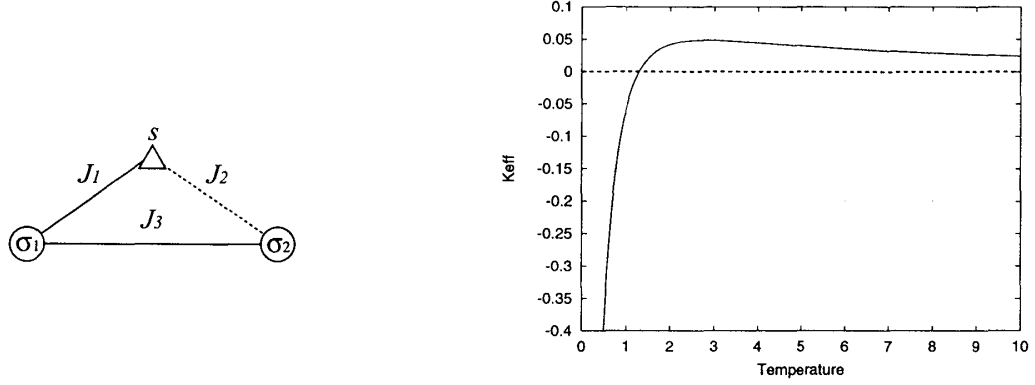


図 13: (左)：実線は強磁性的相互作用，破線は反強磁性的相互作用を表す．(右)： $J_1 = 0.6, J_2 = -0.7, J_3 = 0.28$ とする．リエントラント現象がここでも現れている．

J_1 と J_3 が強磁性的相互作用であり， J_2 が反強磁性的相互作用であるため，全体としてフラストレートしている．有効相互作用はこれまでと同様にして，

$$K_{\text{eff}}(T) = \frac{1}{2} \log \frac{\cosh \beta (J_1 + J_2)}{\cosh \beta (J_1 - J_2)} + \beta J_3 \quad (16)$$

となる．図 11 は式 (16) で $J_1 = 0.6, J_2 = -0.7, J_3 = 0.28$ としたときの有効相互作用の温度依存性である．この系もやはりリエントラント現象を示す．

4.2 飾りボンドにおける相転移

先ほど，温度変化と同時に相互作用を変化させるモデルでスピンの状態を記憶させることが可能であることを示した．しかし実際には注目するスピン間に働く有効相互作用の値は「徐々に」変化するべきである．そこで，先ほど述べた飾りボンドを導入することで，飾りスピンのフリップを確率過程で扱うことにより，有効相互作用の値を徐々に変化させることにする．フラストレート系では有効相互作用 K_{eff} の値は，強磁性的な相互作用の部分と反強磁性的な相互作用の部分の競合によってキャンセルされ，小さくなってしまう．そのため K_0 を超えるような有効相互作用を飾りボンド系で実現するためには工夫が必要となる．そこで我々は飾りボンドを N_0 本繋げることで，先ほど述べたモデルと等価なモデルを考案した．単一の飾りボンドで有効相互作用が $K_{\text{eff}}^{(1)}$ である場合，全体の有効相互作用は $K_{\text{eff}} = N_0 K_{\text{eff}}^{(1)}$ となる．ここで各々のパラメータを $J_1 = 0.6, J_2 = -0.7, J_3 = 0.28, N_0 = 10$ とする (図 14)．

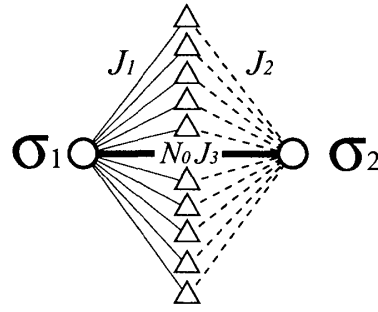


図 14: 実線は強磁性的相互作用, 破線は反強磁性的相互作用である. N_0 は飾りボンドの本数である.

図 15 は有効相互作用の温度依存性を表したものである. 温度 $T_1 = 3$ では $K_{\text{eff}} \simeq 0.48 (> K_C)$ なので, 強磁性秩序が成長する. また, 温度 $T_2 = 1$ では $K_{\text{eff}} \simeq -0.57 (< -K_C)$ なので, 反強磁性秩序が成長する.

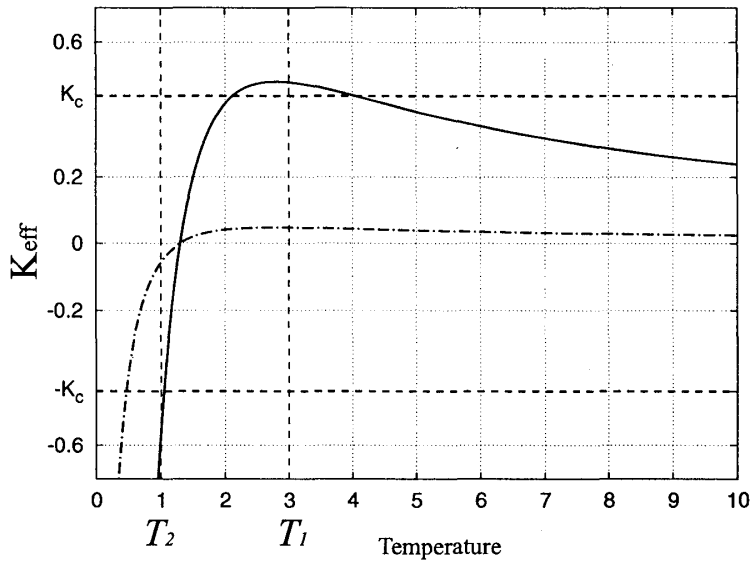


図 15: 一点鎖線は単一の飾りボンド ($N_0 = 1$) のときの有効相互作用の温度依存性を表す. また, 実線は 10 本の飾りボンド ($N_0 = 10$) のときの有効相互作用の温度依存性である. $T_1 = 3$ において, 2 次元正方格子の転移点 $K_C = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \simeq 0.44$ を超える $K_{\text{eff}} \simeq 0.48$ を取る. また, $T_2 = 1$ においては, $K_{\text{eff}} \simeq -0.57$ で, $-K_C$ より低い値となる. そのため, T_1 では強磁性秩序が, T_2 では反強磁性秩序が現れる.

4.3 リエントラント転移の動的振舞

上では有効相互作用の平衡値を計算した. ここではモンテカルロ法 (遷移確率は熱浴法で定める) を用いて, 飾りボンドの動的な振舞を考える. シミュレーションは次の 3 段階で行う.

1. 初期状態をランダムにする．これは秩序の無い高温からスタートしたことに対応する．
2. 温度を $T_1 = 3$ にする．強磁性秩序が存在する温度である．0MCS から 3000MCS までこの温度のまま保持する．
3. 温度を $T_2 = 1$ にする．反強磁性秩序が存在する温度である．緩和過程をより詳細に見るため，遷移確率を 0.1 倍することにより，時間刻みを 0.1MCS とする．

結果は図 4.3 のとおりである．

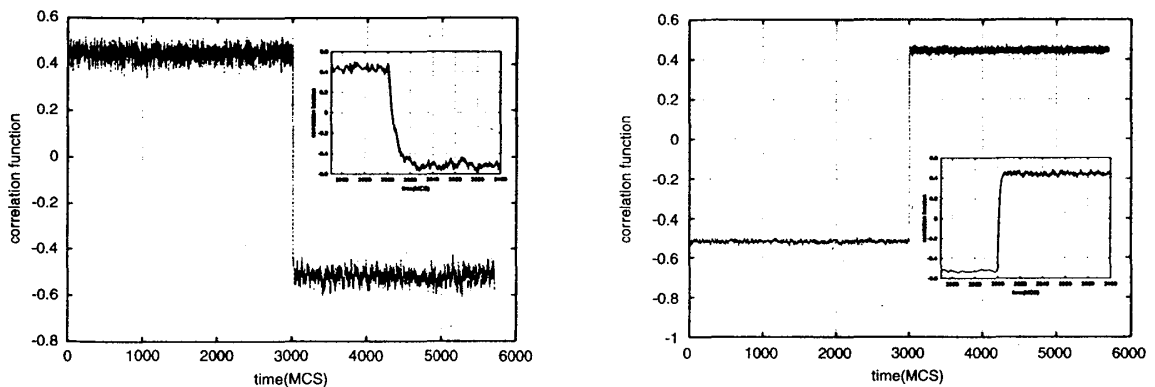


図 16: (左) : 3000MCS で $T_1 \rightarrow T_2$ (高温から低温) の操作を行ったときの相関関数の振舞. (右) : 3000MCS で $T_2 \rightarrow T_1$ (低温から高温) の操作を行ったときの相関関数の振舞. それぞれグラフの内部は 2950MCS から 3100MCS の部分を拡大したものである.

温度 T_2 において瞬時的に有効相互作用の値が変化するのはではなく，徐々に変化していることが見て取れる．比較のため，逆の過程 ($T_2 \rightarrow T_1$: 低温から高温) についても行ったが，これは $T_1 \rightarrow T_2$ に比べて緩和が速い．つまり，飾りボンドによる緩和の遅延は低温 $T_2 = 1$ において主に考慮すべきものであることが分かる．

仮に，有効相互作用の値が等しくても，飾りボンド J_1, J_2 の値が異なると，平衡値に達するまでに要する時間が変わるはずである．その効果を考えるために，図 17 のような系を考える．

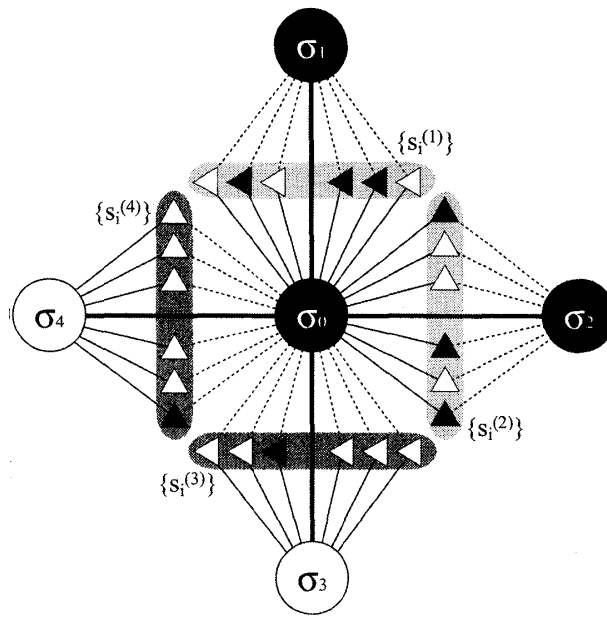


図 17: free spin system. 実線は強磁性的相互作用, 破線は反強磁性的相互作用. 飾りボンドの微視的状态についても描かれている. 丸はシステムスピンを表し, 三角は飾りスピンを表す. 中央のスピン σ_0 を free spin と呼ぶ. 飾りボンドが無ければ, 中央のスピン σ_0 は各々 $1/2$ の確率で状態を選択するが, 飾りボンドがあるために状態を取る確率に偏りが生じる.

これを“free spin system”と呼ぶことにする. 飾りボンドが無い場合, もしくは, 有効相互作用に落とした場合, 中央のスピン σ_0 は $+$, $-$ の状態を等確率 $1/2$ で取る. しかし飾りボンドがあると, σ_0 に接しているボンドの影響で $+$ の状態と $-$ の状態を取る確率は等確率にはならない. 中心のスピンがフリップするのに要する時間を計算することによって, 飾りボンドによる遅延の影響を定量的に議論することが可能となる. “free spin system”を考える上では, J_3 の効果は相殺されてしまうので, free spin system の緩和時間は J_1, J_2, N_0 の関数となっていることが分かる.

ここで“free spin system”のノーテーションをまとめる.

丸で描かれたものは注目するスピン (σ_i, σ_j) であり, 三角で描かれたものは「飾りスピン」 ($\{s_i\}$) である.

- N_0 : 一箇所の (或る注目するスピンのペア) 飾りボンドの本数
- σ_0 : 中央の注目するスピン
- σ_i : 中央以外の注目するスピン, $i = 1, 2, 3, 4$ に対応するのは, それぞれ上, 右, 下, 左である.
- $\{s_i^{(k)}\}$: σ_0 と σ_k の間に張られた飾りボンド上にある飾りスピン

- $m : \# \{+1 | \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(2)}\}_{i=1}^{N_0}\}, 0 \leq m \leq 2N_0$
- $n : \# \{+1 | \{s_i^{(3)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(4)}\}_{i=1}^{N_0}\}, 0 \leq n \leq 2N_0$
- $\langle h^+ \rangle : \{s_i^{(3)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(4)}\}_{i=1}^{N_0}$ から σ_0 が受ける分子場 ($\sigma_0 = -1$ に留まらせようとする分子場)

$$\langle h^+ \rangle = (2N_0 - 2n) |J_2|$$

- $\langle h^- \rangle : \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(2)}\}_{i=1}^{N_0}$ から σ_0 が受ける分子場 ($\sigma_0 = -1$ をフリップさせようとする分子場)

$$\langle h^- \rangle = (-2N_0 + 2m) J_1$$

- $q : \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(2)}\}_{i=1}^{N_0}$ の 1 つのスピンが +1 である確率

$$q = \frac{\exp[-\beta(J_1 + J_2)]}{2 \cosh \beta(J_1 + J_2)}$$

- $p : \{s_i^{(3)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(4)}\}_{i=1}^{N_0}$ の 1 つのスピンが +1 である確率

$$p = \frac{\exp[\beta(J_1 - J_2)]}{2 \cosh \beta(J_1 - J_2)}$$

- $Q(m) : \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(2)}\}_{i=1}^{N_0}$ の m つのスピンが +1 である確率

$$Q(m) = {}_{2N_0}C_m q^m (1 - q)^{2N_0 - m}$$

- $P(n) : \{s_i^{(3)}\}_{i=1}^{N_0}, \{s_i^{(4)}\}_{i=1}^{N_0}$ の n つのスピンが +1 である確率

$$P(n) = {}_{2N_0}C_n p^n (1 - p)^{2N_0 - n}$$

ここで中央のスピン σ_0 がフリップする確率 P を求める。また、有効的な緩和時間を、 $\tau_{\text{eff}} = 1/2P$ で求める。ここで 2 で割っているのは中央のスピン $\sigma_0 = \pm 1$ の 2 状態を取ることに対応する。求め方は、モンテカルロ法の中で代表的なメトロポリス法に倣う。

- $\langle h^+ \rangle + \langle h^- \rangle \geq 0$ のとき、 σ_0 は必ずフリップさせる。
- $\langle h^+ \rangle + \langle h^- \rangle < 0$ のとき、 σ_0 は $\exp[2\beta(\langle h^+ \rangle + \langle h^- \rangle)]$ の確率でフリップする。

ところで、

$$\langle h^+ \rangle + \langle h^- \rangle \geq 0$$

は,

$$m \geq N_0 + (n - N_0) \frac{|J_2|}{J_1} \equiv M_0$$

と同値であるから, 中央のスピン σ_0 がフリップする確率 \mathcal{P} は,

$$\mathcal{P} = \sum_{m \geq M_0} P(n) Q(m) + \sum_{m < M_0} P(n) Q(m) \exp [2\beta (\langle h^+ \rangle + \langle h^- \rangle)] \quad (17)$$

となる. 例えばここで $J_2 = -0.7$ を固定して J_1 を変化させたときに有効緩和時間 τ_{eff} は次のような振舞を示す.

J_1	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\tau_{\text{eff}}[\text{MCS}]$	248.4	309.4	314.0	808.1	1596.1

飾りボンドのパラメータ J_1 を変化させることで, τ_{eff} の変化が生じることが確認された. 飾りボンドがある影響で σ_0 にとって優位な配位を周囲の飾りスピンがとることにより, 中央のスピン σ_0 がフリップするのに要する時間が長くなることを表している⁴.

5 飾りボンド系における記憶効果

これまでフラストレートスピン系におけるリエントラント現象を説明してきた. これまでの研究では, スピン間に働く相互作用の値を温度変化と同時に変更していた [26],[7]. しかしながら, 飾りボンドを考えることにより, 有効相互作用の値は確率過程に従って動的に変化させることが可能である. ここでは飾りボンドを用いて正方格子を組み, 相互作用の動的な変化をも含めた動的特性を考える. 相互作用の値は先ほど考えてきたものと同じ値 ($K_1 \simeq 0.48, K_2 \simeq -0.57, J_1 = 0.6, J_2 = -0.7, J_3 = 0.28, N_0 = 10$) を用いる.

3章では宮下らの方法に倣って, スピン間の相互作用を温度変化と同時に変更して, スピン配位を記憶させることができることを示した. ここではフラストレート飾りボンドで組まれた正方格子系で同様のことを行った. 同じ数値計算方法でスナップショットを撮ったのが次の図 18 である. ただし, ここでそれぞれの丸は「システムスピン」を表し, 飾りボンドについては省略している.

⁴飾りボンドによる秩序形成の遅延の詳細に関しては, S. Tanaka and S. Miyashita, 投稿準備中である.

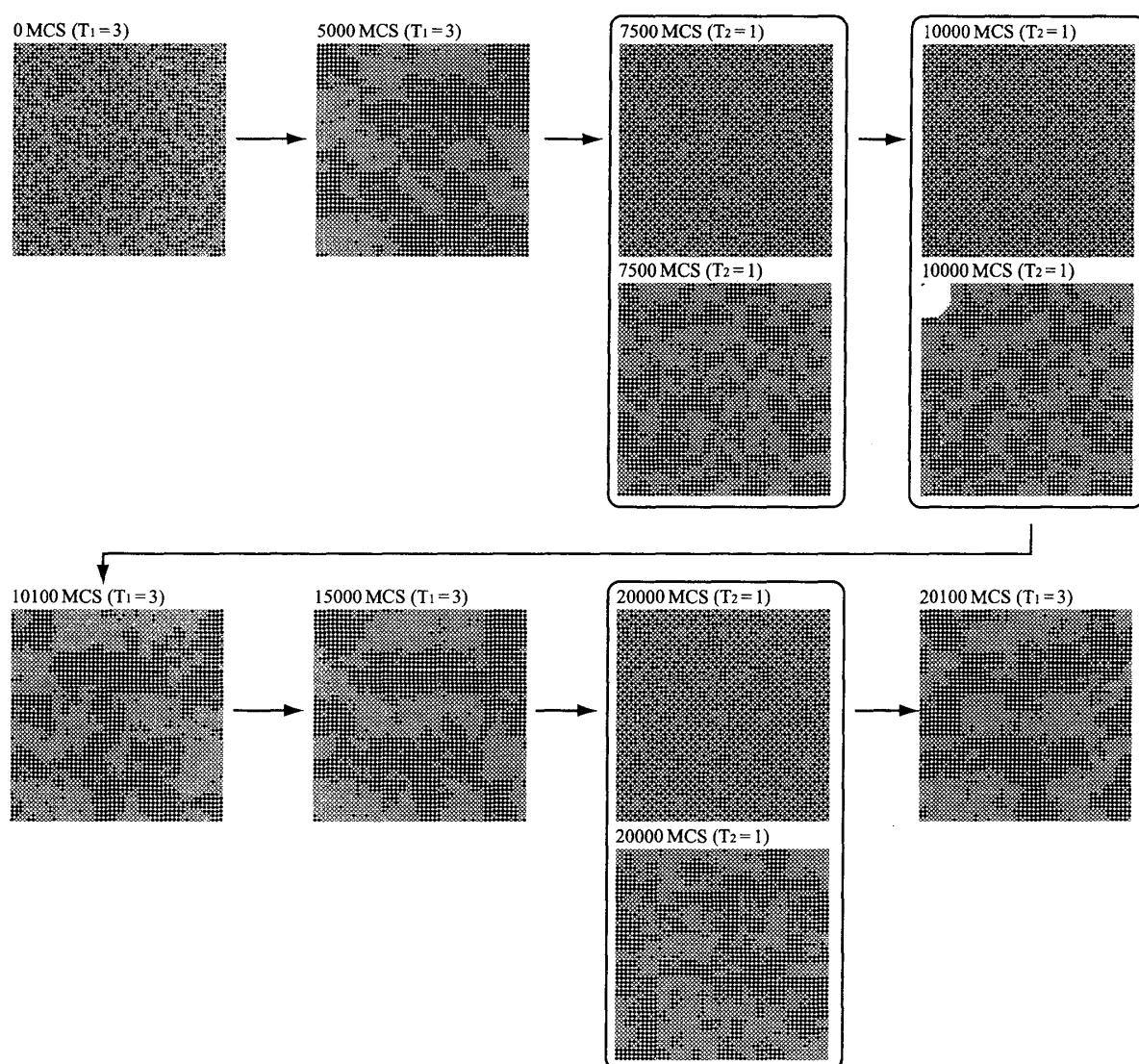


図 18: 飾りボンド系のスナップショット. それぞれの丸はシステムスピンを表す. 飾りスピンは省略している.

フラストレート飾りボンドで構築された系もやはり先ほどと同様に T_1 でそれぞれのドメイン間で強磁性秩序が成長する. 一方で温度 T_2 では, 強磁性秩序が破壊されはするが, 反強磁性秩序は 5000MCS の間には完全には成長しないことが確認できる. これは先ほど述べたように飾りボンドによるスピントリップの遅延の影響である.

この現象を定量的に理解するために, 先ほどと同様な定義の「磁化」と自己相関関数を計算した. ただし, それぞれの物理量はシステムスピンについてのみ和を取った.

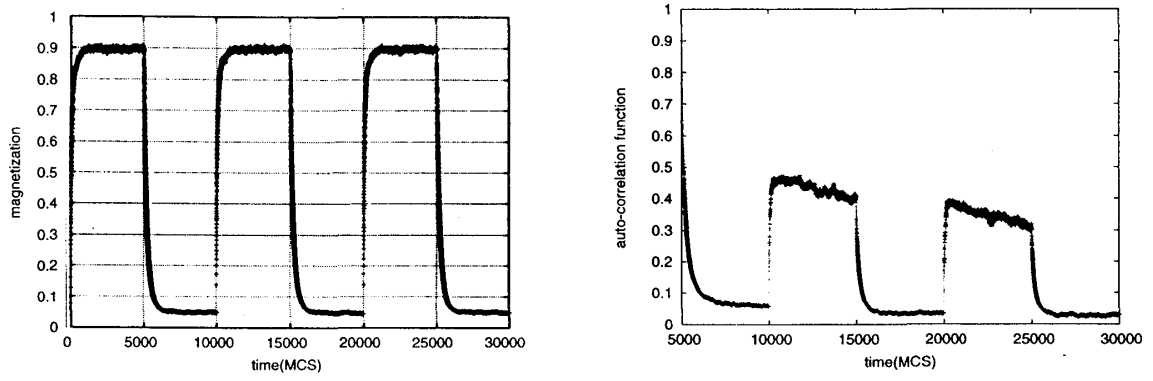


図 19: (左)：温度 T_1 で強磁性秩序が成長し、 T_2 で反強磁性秩序が成長する．結果は 3 章のものとは定性的には同じである．(右)：温度を T_1 に戻した瞬間では、相関関数の値は保持されている．また、相関関数は徐々に減衰している．この現象は 3 章の系では観測されなかった．

磁化の時間発展 (図 19 左) を見ると、3 章の 1 本の温度依存するボンドで構成された系に比べて、平衡値に達するまでに時間を要していることが分かる．

また、自己相関関数 (図 19 右) については 3 章の結果と異なる様相を示した．20000MCS で温度を $T_2 = 1$ から $T_1 = 3$ に戻すと、自己相関関数の値は $T_1 \rightarrow T_2$ と温度を変化させた瞬間である 15000MCS の値に戻る．

5.1 ドメインの緩和時間

ドメインの緩和時間 τ_{domain} を考えるために、 10×10 のユニットの磁化を 100 サンプルの平均を取って求めた．このシミュレーションは温度を $T_1 = 3$ の一定にしている．初期状態をランダムに取り、

$$m^{(0)} = \frac{1}{N} \sum_i s_i^{(0)} \quad (18)$$

として磁化を計算する．ここで $s_i^{(0)}$ は 5000MCS におけるスピンの値であり、 N はシステムスピン数である．次に時刻 t MCS における磁化を、

$$m'(t) = \frac{1}{N} \sum_i s_i(t) \quad (19)$$

として計算する．そして、

$$c(t) = m'(t) \times m^{(0)} \quad (20)$$

という値を定義する．これは磁化の時間相関関数を取っていることに相当する．仮に $c(t) > 0$ だとすると、磁化 $m'(t)$ の符号は 5000MCS の時点の符号と同じである．図 20 は $\langle c(t) \rangle$ の振舞である．

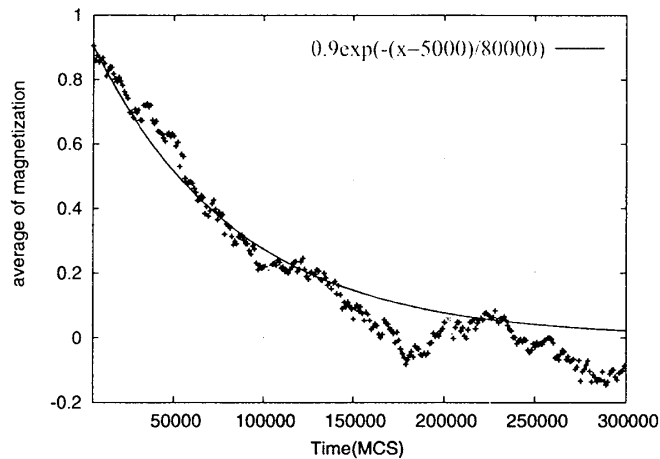


図 20: 磁化の自己相関関数の時間発展

ここから緩和時間を次の式：

$$\langle c(t) \rangle \sim 0.81 \times e^{(t-5000)/\tau_{\text{domain}}} \quad (21)$$

で見積もると， $\tau_{\text{domain}} \simeq 80000\text{MCS}$ 程度となる．式 (21) で 0.81 というのは，この系の磁化の平衡値が $m \sim 0.9$ であるから， $m^2 \sim 0.81$ であることに相当し， $\langle c(5000) \rangle \sim 0.81$ であることによる．

以上により，各々のドメインが反転するのに要する時間が見積もられた．それよりはるかに長い時間，温度 T_1 にしておけば，最終的に全てのドメインが平均的に同じ向きを向くことになり，ドメインの境界の面積(長さ)が小さくなる．すなわち，散逸の効果が小さくなる．これは先に述べた実験で散逸を表す動的帯磁率の虚部 χ'' が徐々に減少していることに対応すると考えられる．

6 結論と今後の課題

6.1 結論

スピングラスのエイジング現象は多くの実験によって確認されてきたが，微視的な機構に関する議論はそれほど多くない．そのため，本研究ではエイジング現象，とりわけ記憶効果について，(スピン間の相互作用レベルでの) 微視的な観点からの解明に取り組んだ．

スピングラスは非常に多くの性質が絡み合った複雑な系であるが，その中からフラストレーションと相互作用の不均一性に着目して，その効果を最大限引き出す有効モデルを考案し，それに関する記憶効果について考えた．

これまでの研究では，温度依存する相互作用を，温度が変わる瞬間に値を変化させるというモデルで行っている．それに対し我々の新しい方法としては，温度依存する相互作用

を繋ぐ飾りボンドを用意し、飾りボンドと繋がっている飾りスピンを媒介として、確率過程で動的に有効相互作用の値を変化させた点が挙げられる。我々の提案したモデルでは、秩序のパターンという形で記憶を埋め込むと言うものである。また、このモデルには3つの緩和時間があることが確認できる。一つめは低温 $T_2 = 1$ で有効相互作用の値が平衡値に至るまでに要する有効緩和時間 τ_{eff} 、二つめはドメインが一斉にフリップするために要する緩和時間 τ_{domain} 、三つめはドメイン間の相互作用が働き、最終的に全てのスピンの同じ向きを向くはずで、それに要する緩和時間 τ_{order} である。特に τ_{eff} に関しては、“free spin system” と呼ぶ系を導入し、解析的に計算した。 τ_{eff} に見られる遅い緩和現象は飾りボンドによる遅延と考えられる。以上のように、我々の研究はスピングラスの動的特性の一つのシナリオを示したことになる。

6.2 議論、今後の課題

先ほど述べたように、フラストレートした飾りボンド系には3つの緩和時間があることを確認したが、 τ_{order} の値は具体的に見積もっていない。また、温度サイクリング条件下で、各ドメインや系全体の秩序がどのように進むかは今後の課題となる。

我々の研究は、強磁性秩序を利用して1つの記憶を保持させるものであるが、このモデルの考え方に近いホップフィールドモデルは複数の記憶を保持させることが可能である。今後そのような機構について考えていく予定である。

Hopfield モデルの紹介

自然科学が進歩するにつれて、次第に生体現象に興味を持たれるようになって来た。1970年代には、生体の良い部分を模倣したシステムの創成にを目指す研究が盛んになった。その中で、生体の中でも最も謎に満ちあふれている脳の機能を模倣するシステムの構築を目指す研究が行われるようになった。

連想記憶や想起のダイナミクスという観点に絞れば、脳はスピングラスに似ていると言えなくもない。この考え方は1982年にHopfieldによって提案された[33]。これは統計物理学の手法を基にしたニューラルネットワークの起源である。

この章では、Hopfield モデルについて概観する。

McCulloch-Pitts model

人間の脳の中には 10^{10} 個のニューロンがある。ニューロンの中枢部である細胞体は情報処理を担う。それぞれのニューロンはシナプスと結合している。電位がある閾値を越えると、細胞は発火する。細胞は発火状態とそのままの状態の2状態を取る。これはイジングモデルと等価として考えることが可能であり、 $s = +1$ を発火状態、 $s = -1$ をそのままの状態と考えれば良いことになる。シナプス結合は興奮状態と抑制状態の2つの状態があり、それらをスピン系における相互作用 J_{ij} とすればよい。さて、次のような時間発展のモデルを考える。

$$S_i(t + \Delta t) = \text{sign} \left(\sum_{ij} J_{ij} (s_j + 1) - J_{iC} \right) \quad (22)$$

ただし、 J_{iC} は閾値を表し、

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (23)$$

とする。簡単のために J_{iC} を J_{ij} と等しいとすれば、

$$s_i(t + \Delta t) = \text{sign} \left(\sum_j J_{ij} s_j \right) \quad (24)$$

これはニューラルネットワークの最も単純な時間発展方程式であり、これを McCulloch-Pitts モデル [34] と言う。

Hebb 則

スピングラスの統計力学においては、 $\{J_{ij}\}$ の組は与えられており、その上でのスピンの状態を見つけることが問題となる。しかしながら、今の場合は与えられた問題から結合を判断するという問題を考えることにする。系は記憶したいいくつかのパターンがある。系はある状態 A から別の状態 B に移ったとしても、A の状態を覚えているのである。これは脳の記憶と言う観点から見た場合、非常に自然な仮定である。この問題を解決する方法が Hebb 則 [35] である。Hebb 則は、Mattis モデル [36] と似ているモデルである。最も適したボンド結合の集合 $\{J_{ij}\}$ を調節することで学習や記憶をさせるのである。

$$J_{ij} = \lambda s_i s_j \quad (25)$$

として、 $\{J_{ij}\}$ を与える。ただし、 λ は学習度と呼ばれるパラメータである。前に述べたように、ニューロンのダイナミクスは McCulloch-Pitts モデルで与えられると考えれば、

$$s_i(t + \Delta t) = \text{sign} \left(\sum_{j=1}^N \lambda s_i s_j^2 \right) = \text{sign}(N \lambda s_i) = s_i \quad (26)$$

よって、 $\{s_i\}$ の状態は安定状態にあると言える。

Hopfield モデル

これまで述べたように、Hebb 則によって、 $\{s_i^{(1)} | -1, +1\}$ を記憶させたシステムに $\{s_i^{(2)} | -1, +1\}$ という新しい記憶を埋め込みたい場合には、 $\{J_{ij}\}$ の値を変化させる必要がある。つまり、

$$J_{ij}^{(2)} = J_{ij}^{(1)} + \lambda s_i^{(2)} s_j^{(2)} \quad (27)$$

とすればよい。このようにして、 N 個の異なるパターンを記憶させるには、

$$J_{ij} = \lambda \sum_{\alpha=1}^N s_i^{\alpha} s_j^{\alpha} \quad (28)$$

とすればよい。ただし、パターン間の距離が短いと記憶は破壊される。

また、ニューラルネットワークのエネルギーを

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} J_{ij} s_i s_j \quad (29)$$

とする。これはスピングラスモデルのハミルトニアンと等価である。つまり、これを用いてニューラルネットワークのダイナミクスを考えることは、基底状態へどのように遷移していくかを考えていることに他ならない。これを Hopfield モデルという。

我々が研究したモデルと Hopfield モデルの関係は系の安定状態に記憶を埋め込むと言う発想においては等価である。

謝辞

宮下精二教授には本研究において有意義な議論をしていただき、感謝しております。また、齊藤圭司助手には物理全般に関するコメントをしていただき、私の物理学の知識や考え方が深まりました。

また、宮下研究室のメンバーである、所裕子博士、轟木義一博士、町田学博士、吉川信一郎氏、小西祐介氏、坂本昌彦氏、東京大学物理工学専攻伊藤研究室、藤堂研究室の皆さんにはセミナーの際に適切な助言をしていただき、感謝しております。

最後に、私の研究活動全般にわたる、経済的支援及び精神的に支えてくださった、家族や関わった全ての人に感謝いたします。

参考文献

- [1] V. Cannella and J. A. Mydosh. Phys. Rev. B, **6**. (1972), 4220.
- [2] S. Nagata, P. H. Keesom, and H. R. Harrison. Phys. Rev. B, **19**. (1979), 1633.
- [3] S. F. Edwards and P. W. Anderson. J. Phys. F: Metal Phys., **5**. (1975), 965.
- [4] H. Nishimori. *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction (International Series of Monographs on Physics, No. 111)*. Oxford Univ. Pr., (2001).
- [5] H. Nishimori. Prog. Theor. Phys., **69**. (1981), 1181.
- [6] N. Surlas. Nature, **339**. (1989), 693.
- [7] S. Miyashita and E. Vincent. Eur. Phys. J. B, **22**. (2001), 203.
- [8] M. Mezard, G. Parisi, and M. A. Virasoro. *Spin Glasses Theory and Beyond*. World Scientific, (1987).
- [9] A. P. Young, ed. *Spin Glasses and Random Fields*. World Scientific, (1997).
- [10] K. H. Fischer and J. A. Hertz. *Spin Glasses (Cambridge Studies in Magnetism 1)*. Cambridge Univ. Pr., (1999).
- [11] J. Kondo. Prog. Theor. Phys., **32**. (1964), 37.
- [12] L. Bellon, S. Ciliberto, and C. Laroche. Europhys. Lett., **51**. (2000), 551.
- [13] Y. Miyamoto, K. Fukao, H. Yamao, and K. Sekimoto. Phys. Rev. Lett., **88**. (2002), 225504.
- [14] L. Leheny and S. R. Nagel. Phys. Rev. B, **57**. (1998), 5154.
- [15] E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J-P. Bouchaud, and L. F. Cugliandolo. cond-mat/9607224.
- [16] Ph. Refregier, E. Vincent, J. Hammann, and M. Ocio. J. Phys. France, **48**. (1987), 1553.
- [17] E. Vincent, J.-P. Bouchaud, J. Hammann, and F. Lefloch. Philos. Mag. B, **71**. (1995), 489.

- [18] P. Granberg, L. Sandlund, P. Nordblad, P. Svedlidh, and L. Lundgren. Phys. Rev. B, **38**. (1988), 7097.
- [19] K. Jonason, E. Vincent, J. Hammann, J.-P. Bouchaud, and P. Nordblad. Phys. Rev. Lett., **81**. (1998), 3243.
- [20] K. Jonason, P. Nordblad, E. Vincent, J. Hammann, and J.-P. Bouchaud. Eur. Phys. J. B, **13**. (2000), 99.
- [21] F. Lefloch, J. Hammann, M. Ocio, and E. Vincent. Europhys. Lett., **18**. (1992), 647.
- [22] V. Dupuis. Ph. D. thesis. (2001).
- [23] T. Sato and A. Hori. J. Magn. Magn. Mater., **272-276**. (2004), 1337.
- [24] H. Kawai and T. Sato. J. Appl. Phys., **85**. (1999), 7310.
- [25] P. E. Jonsson, R. Mathieu, P. Nordblad, H. Yoshino, H. Aruga Katori, and A. Ito. cond-mat/0307640.
- [26] H. Yoshino, A. Lemaitre, and J.-P. Bouchaud. Eur. Phys. J. B, **20**. (2001), 367.
- [27] A. J. Bray and M. A. Moore. Phys. Rev. Lett., **58**. (1987), 57.
- [28] V. Dupuis, E. Vincent, J. Hammann, J. E. Greedan, and A. S. Vills. J. Appl. Phys., **91**. (2002), 8384.
- [29] F. Ladieu, F. Bert, V. Dupuis, E. Vincent, and J. Hammann. J. Phys.: Condens. Matter., **16**. (2004), S735.
- [30] T. Sato and P. Nordblad. J. Magn. Magn. Mater., **226-230**. (2001), 1326.
- [31] S. Miyashita. Prog. Theor. Phys., **69**. (1983), 714.
- [32] D. Sherrington and S. Kirkpatrick. Phys. Rev. Lett., **35**. (1975), 1792.
- [33] J. J. Hopfield. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **79**. (1982), 2554.
- [34] W. S. McCulloch and W. Pitts. Bull. Math. Biophysics, **5**. (1943), 115.
- [35] D. O. Hebb. *The Organization of Behavior*. John Wiley and Sons, (1949).
- [36] D. C. Mattis. Phys. Lett. A, **56**. (1976), 421.